Методические указания по математике для заочного отделения

Предел функции

Предел функции в точке

Определение: Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Если она непрерывна в точке a, то назовем ее значение в точке a пределом функции $y = f(x)$ при стремлении x к a и будем писать

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Если функция $y = f(x)$ разрывна в точке a, то может случиться, что этот разрыв устранимый. Тогда можно изменить значение функции в точке a или доопределить ее в этой точке так, что в результате получится функция, непрерывная в точке a.

Примеры:

1. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 1}{3x + 5}$.

Т.к. функция $y = \dfrac{x^2 - 5x + 1}{3x + 5}$ непрерывна в точке $x = 1$, то предел функции при $x \to 1$, равен ее значению в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 5} = \frac{1 - 5 + 1}{3 + 5} = -\frac{3}{8}.$$

2. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4}$.

Здесь нельзя воспользоваться рассуждением предыдущего примера, поскольку функция $y = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4}$ не определена, а значит, разрывна в точке $x = 2$. Выполним некоторые преобразования аналитического выражения этой функции:

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+2)}.$$

В проколотой окрестности точки $x = 2$ функция $y = \dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+2)}$ совпадает с функцией $y = \dfrac{x - 4}{x + 2}$, непрерывной в этой точке и принимающей в ней значение $-1/2$. Таким образом

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 4}{x + 2} = -\frac{1}{2}.$$

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Если каждое слагаемое алгебраической суммы конечного числа функций имеет предел при $x \to a$, то предел этой алгебраической суммы при $x \to a$ существует и равен такой же алгебраической сумме пределов слагаемых.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)-h(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)-\lim_{x\to a} h(x).$$

Терема 2. Если каждый из сомножителей произведения конечного числа функций имеет предел при $x \to a$, то предел произведения при $x \to a$ равен произведению пределов сомножителей.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x\to a}\left[cf(x)\right]=c\lim_{x\to a} f(x).$$

Следствие 2. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то предел при $x \to a$ целой положительной степени ее равен такой же степени предела этой функции, т.е.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n,$$ (n – натуральное число).

Теорема 3. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, отличный от нуля, то предел при $x \to a$ обратной ей по величине функции $1/f(x)$ равен обратной величине предела данной функции, т.е.

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}.$$

Теорема 4. Если делимое $f(x)$ и делитель $g(x)$ имеют пределы при $x \to a$ и предел делителя отличен от нуля, то предел их частного (дроби) при $x \to a$ равен частному пределов делимого (числителя дроби) и делителя (знаменателя дроби), т.е.

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Теорема 5. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$ и $\sqrt[n]{f(x)}$ (n – натуральное число) существует в точке a и в некоторой ее окрестности, то

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}.$$

Раскрытие неопределенностей

Может случиться, что функция $f(x)$ определена и непрерывна всюду, за исключением некоторого значения $x=a$, при котором функция $f(x)$ теряет смысл (становится неопределенной).

Определение. Операция нахождения предела функции $f(x)$ при $x \to a$ в этом случае называется *раскрытием неопределенности*, а сам предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если он существует, называется *истинным значением функции* $f(x)$ при $x=a$.

Примеры:

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{3x-3}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{3x-3}=\frac{1-1}{3\cdot 1-3}=\left(\frac{0}{0}\right),$$

отсюда следует, что функция $y=\dfrac{x-1}{3x-3}$ не определена, а значит разрывна в точке $x=1$. Выполним некоторые преобразования этой функции, а именно вынесем общий множитель знаменателя дроби за скобку. Получим:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{3x-3}=\frac{x-1}{3(x-1)}=\frac{1}{3}.$$

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{2^2-4}{2-2}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Преобразуем функцию $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, а именно применим формулу сокращенного умножения.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4.$$

3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}=\frac{(-2)^2+5\cdot(-2)+6}{-2+2}=\left(\frac{0}{0}\right),$$

Преобразуем функцию $y=\frac{x^2+5x+6}{x+2}$, а именно разложим на множители квадратный трехчлен, находящийся в числителе, используя теорему Виета.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+3)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x+3)=-2+3=1.$$

4. Вычислить предел $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{2x+1}}$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{2x+1}}=\frac{\sqrt{4}-2}{3-\sqrt{2\cdot 4+1}}=\frac{2-2}{3-3}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Преобразуем функцию $y=\frac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{2x+1}}$, а именно используем умножение числителя и знаменателя на число сопряженное.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(3+\sqrt{2x+1})}{(3-\sqrt{2x+1})(\sqrt{x}+2)(3+\sqrt{2x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\left((\sqrt{x})^2-2^2\right)(3+\sqrt{2x+1})}{\left(3^2-(\sqrt{2x+1})^2\right)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(3+\sqrt{2x+1})}{(9-2x-1)(\sqrt{x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(3+\sqrt{2x+1})}{-2(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{3+\sqrt{2x+1}}{-2(\sqrt{x}+2)}=\frac{3+\sqrt{9}}{(-2)\cdot 4}=\frac{6}{-8}=-\frac{3}{4}$$

5. Вычислить предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 8x}$.

Преобразуем функцию $y=\frac{\sin 7x}{\sin 8x}$, используя «замечательный предел»

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}{\frac{\sin 8x}{8x}\cdot 8x},$$

так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}=1$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}{\frac{\sin 8x}{8x}\cdot 8x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1\cdot 7x}{1\cdot 8x}=\frac{7}{8}$.

6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 7x}{x^2}$.

Так как $\cos 5x-\cos 7x=2\sin x\sin 6x$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 7x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin 6x}{x^2}=12\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin 6x}{6x}\right)=12.$$

Производная функции одной переменной.

Общее определение производной.

Определение. Если функция $f(x)$ определена на промежутке $(a;b)$, то производной функции $f(x)$ в точке $x_0 \in (a;b)$ называется предел отношения приращения функции

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

к приращению независимого переменного Δx $(\Delta x = x - x_0)$ при Δx, стремящемся к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если этот предел существует, то говорят, что функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 или что $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Производная от функции $f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$.

Если предел не существует, то говорят, что функция $f(x)$ не дифференцируема в точке x_0.

Для обозначения производной данной функции $y = f(x)$ кроме

$$y' = f'(x)^{1)}$$

употребляются также символы

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)^{2)}.$$

В тех случаях, когда неясно, по какому аргументу (x, t и т.п.) происходит дифференцирование функции y, для соответствующих производных употребляются обозначения

y'_x, y'_t и т.п.

---

[1] Читается: «игрек штрих равно эф штрих от икс».

[2] $\frac{dy}{dx}$ читается: «дэ игрек по де икс».

Основные формулы.

Если x - независимая переменная, то

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$, где n – постоянное число;
2. $\left(e^x\right)' = e^x$;
3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$;
4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, где $a > 0$;
5. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$, где $x > 0$;
6. $\left(\sin x\right)' = \cos x$;
7. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$;
8. $\left(tg\ x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
9. $\left(ctg\ x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
10. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $\left(arctg\ x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
13. $\left(arcctg\ x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Пример:

1. $\left(2x-3\right)' = 2$;

2. $\left(x^{10}\right)' = 10x^9$;

3. $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-3}$;

4. $\left(x^{\frac{3}{5}}\right)' = \dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$;

5. $\left(5^x\right) = 5^x \ln 5$;

6. $(\lg x)' = \dfrac{1}{x \ln 10}$.

Основные правила нахождения производных.

Если c – постоянная величина и функции $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ имеют производные, то

1. $(c)' = 0$;
2. $(Cu)' = Cu'$;
3. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;
4. $(uv)' = u'v + uv'$;
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;
6. если функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ имеют производные, то

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Пример:

1. Найти производную функции $y = 2\sin x - \dfrac{\cos x}{3} + 5$

Воспользуемся правилами 2 и 3.

$$\left(2\sin x - \frac{\cos x}{3} + 5\right)' = (2\sin x)' + \left(-\frac{1}{3}\cos x\right)' + 5' = 2(\sin x)' - \frac{1}{3}(\cos x)' + 5'$$

Осталось применить соответствующие формулы дифференцирования. Получим

$$2(\sin x)' - \frac{1}{3}(\cos x)' + 5' = 2\cos x - \frac{1}{3}(-\sin x) + 0 = 2\cos x + \frac{1}{3}\sin x = 2\cos x + \frac{\sin x}{3}$$

2. Найти $\left(x^{\frac{2}{5}} \log_3 x\right)'$

Воспользуемся правилом 4. Получим

$$\left(x^{\frac{2}{5}}\log_3 x\right)' = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)'\log_3 x + x^{\frac{2}{5}}\left(\log_3 x\right)'$$

Осталось применить соответствующие формулы дифференцирования.

$$\left(x^{\frac{2}{5}}\right)'\log_3 x + x^{\frac{2}{5}}\left(\log_3 x\right)' = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}\log_3 x + \frac{x^{\frac{2}{5}}}{x\ln 3}$$

3. Найти производную функции $y = \frac{1}{3}x^3 \cdot arctg\, x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln\left(x^2+1\right).$

$$\left(\frac{1}{3}x^3 \cdot arctg\, x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln\left(x^2+1\right)\right)' = \frac{1}{3}\left(x^3 \cdot arctg\, x\right)' - \frac{1}{6}\left(x^2\right)' + \frac{1}{6}\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(x^3\right)' \cdot arctg\, x + x^3\left(arctg\, x\right)'\right) - \frac{1}{6}\cdot 2x + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3x^2 \cdot arctg\, x + x^3\cdot\frac{1}{1+x^2}\right) - \frac{2x}{6} + \frac{1\cdot 2x}{6\left(x^2+1\right)} = x^2\cdot arctg\, x + \frac{x^3}{3\left(1+x^2\right)} - \frac{x}{3} + \frac{x}{3\left(x^2+1\right)} =$$

$$= x^2\cdot arctg\, x + \frac{x^3 - x - x^3 + x}{3\left(1+x^2\right)} = x^2\cdot arctg\, x + 0 = x^2 \cdot arctg\, x$$

Геометрическое значение производной.

Для данной функции $f(x)$ ее производная $f'(x)$ для каждого значения x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в соответствующей точке.

Пример: Написать уравнение касательной к кривой $y = x^2$ в точке $M(1;1)$ (рис.1)

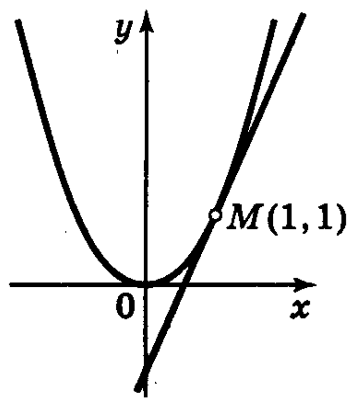


Рис.1

Ищем производную $f'(x)$ при $x=1$.

Согласно формуле $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$, где n – постоянное число, имеем

$f'(x) = 2x$.

Отсюда $k = f'(1) = 2$.

Следовательно, уравнение касательной запишется следующим образом:

$y - 1 = 2(x-1)$, или $y = 2x - 1$.

Заметим, что касательная к графику функции $y = f(x)$ образует в данной точке с положительным направлением оси Ox острый или тупой угол, смотря по тому, будет ли производная функции в этой точке положительна или отрицательна. Если же производная равна нулю, то касательная к графику функции в соответствующей точке параллельна оси Ox. Справедливы также и обратные утверждения.

Физический смысл производной

Теорема: Скорость движения материальной точки в данный момент времени равна производной пути по времени. Если $S = f(t)$, то $S'(t_0)$ – мгновенная скорость.

Пример 1: Путь, пройденный материальной точкой, задаётся уравнением $S = 3t^2 - 2t + 4$. Найти скорость движения в конце пятой секунды.

Ищем производную $S'(t)$ при $t = 5$. Согласно правилам 2 и 3 имеем

$$S'(t) = 3(t^2)' - 2t' + 4' = 6t - 2.$$

Отсюда

$$S'(5) = 6 \cdot 5 - 2 = 30 - 2 = 28 \text{ м/с}.$$

Ответ: В конце пятой секунды скорость движения будет равна 28 м/с.

Пример 2: Высота тела брошенного вертикально вверх меняется по закону:

$$H = 200t - 4{,}9t^2.$$

1) Найти скорость тела в конце десятой секунды.

Ищем производную $H'(t)$ при $t = 10$. Согласно правилам 2 и 3 имеем

$$H'(t) = 200t' - 4{,}9(t^2)' = 200 - 9{,}8t.$$

Отсюда

$$H'(10) = 200 - 9{,}8 \cdot 10 = 200 - 98 = 102 \text{ м/с}.$$

2) Сколько секунд тело будет лететь вверх.

Т.е. необходимо узнать в какой момент времени тело остановится, достигнув своей наибольшей высоты. Пусть $H'(t) = 0$, тогда

$$200 - 9{,}8t = 0$$

$$-9{,}8t = -200$$

$$t = \frac{200}{9{,}8} = 20{,}4 \text{ с}$$

2) Какой наибольшей высоты достигнет тело?

Т.е. необходимо узнать какой будет высота тела в момент времени 20,4 с.

$$H = 200 \cdot 20{,}4 - 4{,}9 \cdot 20{,}4^2 = 2040{,}8\ м$$

Ответ: В конце десятой секунды скорость брошенного вертикально вверх тела будет равна 102 м/с; В момент времени 20,4 с. тело остановится; Наибольшая высота подъёма тела равна 2040,8 м.

Применение производной к исследованию функций.

Исследование функции на монотонность.

Теорема: Если значения производной функции $y = f(x)$ положительны на некотором промежутке X,

т.е. $f'(x) > 0$,

то функция $f(x)$ *возрастает* на этом промежутке.

Теорема: Если значения производной функции $y = f(x)$ отрицательны на некотором промежутке X,

т.е. $f'(x) < 0$,

то функция $f(x)$ *убывает* на этом промежутке.

Определение: Промежутки возрастания и убывания функции называют *промежутками монотонности* этой функции.

Определение: Точки, в которых производная некоторой функции либо равна нулю, либо не существует, называются *критическими точками* для данной функции.

Пример: Исследовать на монотонность функцию $y = \frac{x^2}{2} - 3\ln(x-2)$.

1) Находим область определения функции :

$$x - 2 > 0$$
$$x > 2$$

2) Находим производную данной функции:

$$y' = \frac{1}{2}\left(x^2\right)' - 3\left(\ln(x-2)\right)' \cdot (x-2)' = \frac{1}{2} \cdot 2x - 3 \cdot \frac{1}{x-2} \cdot 1 = x - \frac{3}{x-2} =$$
$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{x-2} = \frac{(x-3)(x+1)}{x-2}.$$

3) Находим точки, в которых выполняется равенство $f'(x)=0$:

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x-2}=0, \text{ при } x=3 \text{ и } x=-1.$$

4) Находим точки, в которых $f'(x)$ не существует:

при $x=2$ $f'(x)$ не существует.

5) Отмечаем на координатной прямой все критические точки и область определения функции $y=f(x)$; получаются промежутки области определения функции, на каждом из которых производная функции $y=f(x)$ сохраняет постоянный знак.

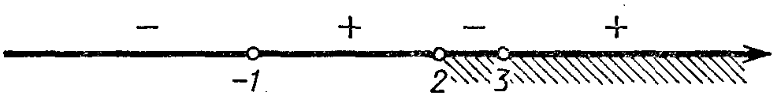


Рис. 2

Знаки выражения $\frac{(x-3)(x+1)}{x-2}$ меняются так, как показано на рис.2 . Т.к. область исследуемой функции задается неравенством $x>2$, то из показанных на рисунке четырех промежутков нас интересуют только два:

промежуток $(2;3)$ - на нем $f'(x)<0$, значит, функция на этом интервале убывает;

промежуток $(3;+\infty)$ - на нем $f'(x)>0$, значит, функция на этом интервале возрастает.

Исследование функции на экстремум.

Определение: *Окрестностью* точки x называется некоторый интервал, содержащий эту точку.

Определение: Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x)\le f(x_0).$$

Определение: Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0).$$

<u>Определение:</u> Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума.*

<u>Теорема:</u> (первое правило)

Если дифференцируемая функция $f(x)$ такова, что для некоторого значения x_0 ее аргумента x производная $f'(x)$ равна нулю и меняет свой знак при переходе через это значение, то число $f(x_0)$ является экстремумом функции $f(x)$, причем:

а) функция $f(x)$ имеет максимум при $x = x_0$, если изменение знака производной $f'(x)$ происходит с плюса на минус;

б) функция $f(x)$ имеет минимум при $x = x_0$, если изменение знака производной $f'(x)$ происходит с минуса на плюс;

<u>Пример:</u> Найти точки экстремума функции $f(x) = x^3 - x$ и значения функции в этих точках.

1) Находим область определения функции:

функция определена при всех x.

2) Находим производную данной функции:

$$f'(x) = \left(x^3\right)' - x' = 3x^2 - 1 = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

3) Находим точки, в которых выполняется равенство $f'(x) = 0$:

$$3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0, \text{ при } x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ и } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4) Находим точки, в которых $f'(x)$ не существует:

$f'(x)$ существует при всех x.

5) Отмечаем на координатной прямой все критические точки и область определения функции $y = f(x)$ (рис. 3).

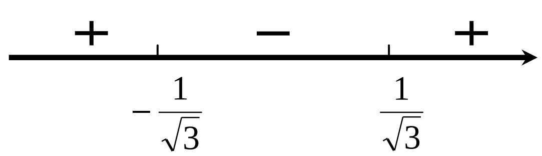


Рис. 3

При переходе через точку $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с плюса на минус, поэтому $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ - точка максимума.

При переходе через точку $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ - точка минимума.

Находим значение функции в точке максимума

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{-1+3}{3\sqrt{3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Находим значение функции в точке минимума

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1-3}{3\sqrt{3}}=-\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ - точка максимума.

$\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ - точка минимума.

Теорема: (второе правило)

Если для дифференцируемой функции $f(x)$ в некоторой точке x_0 ее первая производная $f'(x)$ равна нулю, а вторая производная $f''(x)$ существует и отлична от нуля, т.е.

$$f'(x_0)=0, \quad f''(x_0)\neq 0,$$

то в этой точке функция $f(x)$ имеет экстремум, а именно:

1) если $f''(x_0)>0$, то $f(x_0)$ - минимум функции $f(x)$;
2) если $f''(x_0)<0$, то $f(x_0)$ - максимум функции $f(x)$.

Пример: Найти точки экстремума функции $f(x)=x^3-x$ и значения функции в этих точках.

1) Находим область определения функции:

функция определена при всех x.

2) Находим производную данной функции:

$$f'(x) = \left(x^3\right)' - x' = 3x^2 - 1 = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

3) Находим точки, в которых выполняется равенство $f'(x) = 0$:

$3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$, при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4) Находим точки, в которых $f'(x)$ не существует:

$f'(x)$ существует при всех x.

5) Находим вторую производную данной функции:

$$f''(x) = \left(3x^2 - 1\right)' = 6x.$$

6) Находим знак второй производной данной функции при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0,$$

отсюда следует, что точка $\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ - точка минимума.

7) Находим знак второй производной данной функции при $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$f''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{3}} < 0,$$

отсюда следует, что точка $\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ - точка максимума.

Ответ: $\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ - точка максимума.

$\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ - точка минимума.

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на заданном отрезке.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке $[a;b]$, имеющей на интервале $(a;b)$ конечное число критических точек, достаточно вычислить значения функции во всех критических точках функции, принадлежащих интервалу $(a;b)$, и на концах отрезка и из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

<u>Пример</u>: Найти наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции

$$f(x)=x^3-3x^2-45x+225 \text{ на отрезке } [0;6].$$

1) Находим производную данной функции:

$$f'(x)=\left(x^3\right)'-3\left(x^2\right)'-45x'+225'=3x^2-3\cdot 2x-45\cdot 1+0=3x^2-6x-45=$$

$$=(x+3)(x-5).$$

2) Находим точки, в которых $f'(x)$ не существует:

$$f'(x) \text{ существует при всех } x.$$

3) Находим точки, в которых выполняется равенство $f'(x)=0$:

$$(x+3)(x-5)=0, \text{ при } x=-3 \text{ и } x=5.$$

Отрезку $[0;6]$ принадлежит лишь точка $x=5$.

4) Вычислим значения функции в критической точке $x=5$ и на концах отрезка, т.е. при $x=0$ и при $x=6$.

$$f(5)=5^3-3\cdot 5^2-45\cdot 5+225=125-75-225+225=50$$

$$f(0)=0^3-3\cdot 0^2-45\cdot 0+225=225$$

$$f(6)=6^3-3\cdot 6^2-45\cdot 6+225=216-108-270+225=63$$

Наибольшим из найденных значений функции является $f(0)=225$, а наименьшим - $f(5)=50$.

<u>Ответ:</u> $f(x)_{наиб.}=225$

$f(x)_{наим.}=50$

Производная сложной функции

Сложная функция – это функция от функции. Говоря о сложной функции, имеют в виду, что такая функция составлена из нескольких функций.

Теорема: *если функция* $f(u)$ *дифференцируема по u, а u(x) дифференцируема по x, то производная сложной функции y= f(u(x)) по независимой переменной x определяется равенством* $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

т. е. *производная функции y по аргументу x равна производной этой функции по промежуточному аргументу u, умноженной на производную промежуточного аргумента u по основному аргументу x.*

Это правило иногда называют *правилом цепочки.* Оно остается справедливым и в случае, когда сложная функция состоит из любого конечного числа простых функций. Таким образом, производная сложной функции равна произведению производных от всех составляющих ее функций. При этом следует помнить, что каждую функцию нужно дифференцировать по ее собственному аргументу.

Пример:

1) $y=(x^2+3x)^5$, $y'=5(x^2+3x)^4(x^2+3x)'$, $y'=5(x^2+3x)^4(2x+3)$.

2) $y=\sqrt{x^4-3}$, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^4-3}}\cdot\left(x^4-3\right)'$, $y'=\dfrac{4x^3}{2\sqrt{x^4-3}}$, $y'=\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4-3}}$.

3) $y=\dfrac{(2x+5)^3}{\sqrt{x}}$, $y'=\dfrac{3(2x+5)^2(2x+5)'\sqrt{x}-(2x+5)^3\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$,

$$y'=\frac{6\sqrt{x}(2x+5)^2-\dfrac{(2x+5)^3}{2\sqrt{x}}}{x},\quad y'=\frac{\dfrac{12x(2x+5)^2-(2x+5)^3}{2\sqrt{x}}}{x},\quad y'=\frac{(2x+5)^2(12x-2x-5)}{2x\sqrt{x}},$$

$$y'=\frac{(2x+5)^2(10x-5)}{2x\sqrt{x}}.$$

Первообразная функция.

Неопределенный интеграл.

Основная задача дифференциального исчисления состоит в нахождении дифференциала данной функции или ее производной. Интегральное исчисление решает обратную задачу: по заданному дифференциалу или производной неизвестной функции $F(x)$ требуется определить эту функцию.

$F'(x)=f(x)$, где $f(x)$ - неизвестная функция, нужно найти функцию $F(x)$. Для простоты мы будем предполагать, что данное равенство выполнено на некотором конечном или бесконечном промежутке.

Искомая функция $F(x)$ называется при этом первообразной функцией по отношению к функции $f(x)$. Таким образом, мы можем дать следующее определение первообразной функции.

Определение. *Первообразной функцией* для данной функции $f(x)$ на данном промежутке называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$ или дифференциал которой равен $f(x)dx$ на рассматриваемом промежутке.

Пример. Пусть $f(x)=x^3$. Тогда первообразная $F(x)$ имеет вид $F(x)=\dfrac{x^4}{4}$, так как

$$F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3=f(x).$$

Но это не единственное решение задачи. Так, в качестве первообразной, можно было взять и функцию $F_1(x)=\dfrac{x^4}{4}+3$ (поскольку $\left(\dfrac{x^4}{4}+3\right)'=x^3$), и функцию $F_2(x)=\dfrac{x^4}{4}-5$ (поскольку $\left(\dfrac{x^4}{4}-5\right)'=x^3$) и вообще любую функцию вида $\dfrac{x^4}{4}+C$.

Теорема. Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то у функции $f(x)$ бесконечно много первообразных, и все эти первообразные имеют вид $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная (*основное свойство первообразной*).

Определение. Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ или от дифференциального выражения $f(x)dx$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а выражение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*.

Согласно данному определению неопределенного интеграла можно написать

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$ и постоянная C может принимать любое значение.

Основные свойства неопределенного интеграла.

1. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$d\int f(x)dx = f(x)dx \quad \text{и} \quad \left[\int f(x)dx\right]' = f(x).$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывной дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого.

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C.$$

3. Отличный от нуля постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла, т.е. если постоянная $a \neq 0$, то

$$\int a\, f(x)dx = a\int f(x)dx.$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций, т.е. если, например, функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ непрерывны в интервале (a,b), то

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx, \text{ при } x \in (a,b).$$

Таблица неопределенных интегралов.

Пользуясь тем, что интегрирование есть операция, обратная дифференцированию, нетрудно получить таблицу простейших интегралов.

I. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$;

II. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$;

III. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctg\ x + C = -arcctg\ x + C_1$;

IV. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$;

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$;

VI. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C \quad (\alpha \neq 0)$;

VII. $\int e^x dx = e^x + C$;

VIII. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;

IX. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

X. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

XI. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\ x + C$;

XII. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\ x + C$.

В данной таблице предполагается, что x есть независимая переменная. Однако эта таблица полностью сохраняет свое значение, если под x понимать любую непрерывно дифференцируемую функцию от независимой переменной.

<u>Пример.</u>

1. Вычислить $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Имеем $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-1/3} dx$. Воспользовавшись формулой **I** при $m = -1/3$ получим

$$\int x^{-1/3} dx = \frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + C = \frac{3}{2} x^{2/3} + C.$$

2. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+1} + \sqrt{4x-2}}$.

Умножив числитель и знаменатель подынтегрального выражения на выражение, сопряженное знаменателю, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x+1} + \sqrt{4x-2}} = \int \frac{\sqrt{4x+1} - \sqrt{4x-2}}{\left(\sqrt{4x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{4x-2}\right)^2} dx =$$

$$= \int \frac{\sqrt{4x+1} - \sqrt{4x-2}}{3} dx = \frac{1}{3} \int (4x+1)^{1/2} dx - \frac{1}{3} \int (4x-2)^{1/2} dx.$$

Применив к каждому из двух полученных интегралов формулу **I**
(при $m = 1/2$), получим

$$= \frac{1}{3} \int (4x+1)^{1/2} dx - \frac{1}{3} \int (4x-2)^{1/2} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(4x+1)^{1/2+1}}{(1/2+1) \cdot 4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(4x-2)^{1/2+1}}{(1/2+1) \cdot 4} + C =$$

$$= \frac{1}{18} \left(\sqrt{(4x+1)^3} - \sqrt{(4x-2)^3} \right) + C.$$

3. Вычислить $\int \sin x \sin 4x \, dx$.

Используя формулу $\sin x \sin 4x = \frac{\cos 3x - \cos 5x}{2}$, имеем

$$\int \sin x \sin 4x \, dx = \frac{1}{2} \int \cos 3x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 5x \, dx.$$

Применяя к каждому слагаемому формулу **X**, получим

$$=\frac{1}{2}\int \cos 3x\,dx-\frac{1}{2}\int \cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 3x}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 5x}{5}+C=\frac{\sin 3x}{6}-\frac{\sin 5x}{10}+C.$$

Основные методы интегрирования.

1. **Метод разложения.**

Пусть $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, тогда на основании свойства 4 имеем

$$\int f(x)\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx.$$

По возможности слагаемые $f_1(x)$ и $f_2(x)$ стараются подобрать так, чтобы интегралы от них находились непосредственно.

Пример.

Вычислить $\int \frac{x^4-6x^3-8x^2+9x-5}{x^2}dx$.

Разделим почленно числитель на знаменатель, получим

$$\int \frac{x^4-6x^3-8x^2+9x-5}{x^2}dx=\int\left(x^2-6x-8+\frac{9}{x}-\frac{5}{x^2}\right)dx=$$

$$=\int x^2dx-6\int x\,dx-8\int dx+9\int\frac{dx}{x}-5\int x^{-2}dx=\frac{x^3}{3}-6\cdot\frac{x^2}{2}-8x+9\ln|x|-5\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}-3x^2-8x+9\ln|x|+\frac{5}{x}+C.$$

2. **Метод подстановки (метод введения новой переменной).**

Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b) и $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале (α,β); причем функция φ отображает интервал (α,β) в интервал (a,b).

На основании свойства независимости неопределенного интеграла от выбора аргумента и учитывая, что $dx=\varphi'(t)dt$, получаем формулу замены переменной в неопределенном интеграле

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Интеграл, стоящий в правой части данного равенства, может оказаться проще интеграла, стоящего в левой части этого равенства, или даже табличным.

Пример.

Вычислить $\int \frac{\sqrt[3]{1+ctg\,x}}{\sin^2 x}dx$.

Полагая $t=1+ctg\,x$, $dt=-\frac{dx}{\sin^2 x}$ и, следовательно, $dx=-\sin^2 x\,dt$ будем иметь

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+ctg\,x}}{\sin^2 x}dx=-\int \frac{t^{1/3}}{\sin^2 x}\cdot\sin^2 x\,dt=-\int t^{1/3}dt=$$

$$=-\frac{3}{4}t^{4/3}+C=-\frac{3}{4}(1+ctg\,x)^{4/3}+C\,.$$

4. Метод интегрирования по частям.

Пусть u и v - непрерывно дифференцируемые функции от x. На основании формулы дифференциала произведения имеем

$$d(uv)=u\,dv+v\,du\,,\quad \text{отсюда}\quad u\,dv=d(uv)-v\,du\,.$$

Интегрируя, получим

$$\int u\,dv=\int d(uv)-\int v\,du\,,$$

и окончательно

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du .$$

Это и есть формула интегрирования по частям.

Выведенная формула показывает, что интеграл $\int u\,dv$ приводится к интегралу $\int v\,du$, который может оказаться более простым, чем исходный, или даже табличным.

Пример.

Вычислить $\int x\cos x\,dx$.

Полагая $u = x$ и $dv = \cos x\,dx$, имеем $du = dx$ и $v = \int \cos x\,dx = \sin x$. Пользуясь формулой интегрирования по частям, получим

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C .$$

Интегрирование рациональных дробей с квадратичным знаменателем.

Речь идет о вычислении интегралов вида

$$\int \frac{P(x)}{ax^2 + bx + c}\,dx ,$$

где $P(x)$ - целый многочлен, a, b, c - постоянные, $a \neq 0$. Разделив числитель $P(x)$ на знаменатель $ax^2 + bx + c$, получаем в частном некоторый многочлен $Q(x)$ и в остатке – линейный двучлен $mx + n$ (так как степень остатка ниже степени делителя); отсюда

$$\frac{P(x)}{ax^2 + bx + c} = Q(x) + \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} .$$

Интеграл от многочлена $Q(x)$ находится непосредственно, поэтому подробнее разберем, как вычисляются интегралы вида

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx.$$

Введем сначала три основных интеграла.

I. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0);$

II. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0);$

III. $\int \frac{x\,dx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln\left|x^2 \pm a^2\right| + C.$

<u>Пример.</u>

1. $\int \frac{dx}{2x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x\sqrt{2}\right)}{\left(x\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} arctg\left(x\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + C.$

2. $\int \frac{dx}{x^2-5} = \int \frac{dx}{x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C.$

Основной прием вычисления интеграла $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ состоит в следующем: квадратный трехчлен ax^2+bx+c дополняют до полного квадрата. После этого, в зависимости от коэффициента m ($m=0$ или $m \neq 0$) данный интеграл сводится к интегралу **I**, **II** или **III**.

<u>Пример.</u>

1. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2-10x+16}$.

$$\int \frac{dx}{x^2-10x+16} = \int \frac{dx}{\left(x^2-2\cdot 5x+25\right)+\left(16-25\right)} = \int \frac{d\left(x-5\right)}{\left(x-5\right)^2-3^2} =$$

$$\frac{1}{2\cdot 3} \ln\left|\frac{\left(x-5\right)-3}{\left(x-5\right)+3}\right| + C = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x-8}{x-2}\right| + C.$$

2. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+3x+4}$.

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+4} = \int \frac{dx}{\left(x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)+\left(4-\frac{9}{4}\right)} = \int \frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} arctg\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{7}} arctg\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

<u>**Интегрирование иррациональностей.**</u>

1. Если подынтегральное выражение содержит лишь линейную иррациональность $\sqrt[n]{ax+b}$ $(a \neq 0)$, то полезна подстановка

$$t = \sqrt[n]{ax+b}.$$

<u>**Пример.**</u>

Найти $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x+5}}$.

Полагаем $t = \sqrt[4]{x+5}$, отсюда $x = t^4 - 5$ и $dx = 4t^3 dt$. Имеем

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x+5}} = \int \frac{(t^4-5)4t^3 dt}{t} = 4\int (t^4-5)t^2 dt = 4\int (t^6-5t^2)dt =$$

$$= \frac{4t^7}{7} - \frac{20t^3}{3} + C = \frac{4}{7}(x+5)^{7/4} - \frac{20}{3}(x+5)^{3/4} + C.$$

2. Интеграл от квадратичной иррациональности

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

с помощью дополнения квадратного трехчлена ax^2bx+c до полного квадрата сводится к одному из двух интегралов

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha \pm x^2}},$$

вычисление которых представлено ниже.

I. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} \quad (\alpha \neq 0).$

Данный интеграл является табличным

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right| + C \quad (\alpha \neq 0).$$

<u>Пример.</u>

Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$.

Дополним квадратный трехчлен $x^2-6x+13$ до полного квадрата. Получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-2\cdot 3x+9\right)+\left(13-9\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-3\right)^2+4}}.$$

Полагая здесь $x-3=t$, последовательно получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-3\right)^2+4}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right| + C.$$

Так как $t=x-3$, то окончательно будем иметь

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2+4}\right|+C = \ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+13}\right|+C.$$

II. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>0).$$

<u>Пример.</u>

Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}x+x^2\right)}} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}+C = \arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$$

Определенный интеграл.

Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на данном отрезке $[a,b]$, где $a<b$ или $a>b$, и $F(x)$ - некоторая ее первообразная, т.е. $F'(x)=f(x)$ при $x\in[a,b]$.

<u>Определение.</u> Под *определенным интегралом*

$$\int_a^b f(x)dx$$

От данной непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a,b]$ понимается соответствующее приращение ее первообразной, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(***Формула Ньютона - Лейбница***).

Кроме того, для любой функции $f(x)$, имеющей смысл в точке a

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

(a - любое). Таким образом, формула Ньютона – Лейбница справедлива также при $a = b$.

В выражении $\int_a^b f(x)dx$ числа a и b называются *пределами интегрирования*, соответственно – *нижним и верхним*, $[a, b]$ - промежутком интегрирования, а $f(x)$- подынтегральной функцией.

Формулу Ньютона – Лейбница можно выразить в виде правила: определенный интеграл равен разности значений первообразной подынтегральной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Введя обозначение для разности

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b ,$$

где вертикальная черта носит название вставки, формулу Ньютона – Лейбница можно записать еще так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b ,$$

Причем следует помнить, что при расшифровки вставки сначала подставляется верхний предел интегрирования, а затем нижний.

Пример.

1.Вычислить $\int_0^1 x^7 dx$.

Для функции $f(x) = x^7$ первообразной является $F(x) = \frac{x^8}{8}$. Значит

$$\int_0^1 x^7 dx = \frac{x^8}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}.$$

2.Вычислить $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$.

Для функции $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ первообразной является $F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+3|$ (используем формулу $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$). Значит,

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln|2x+3|\,\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 7 - \frac{1}{2}\ln 5 = \frac{1}{2}(\ln 7 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}.$$

Основные свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

2. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

$$\int_a^b [f(x)+g(x)-h(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx .$$

Пример.

Вычислить $\int_{-2}^{1}\left(2x^3+3x-4\right)dx$.

Воспользовавшись свойствами определенного интеграла, получим:

$$\int_{-2}^{1}\left(2x^3+3x-4\right)dx = \int_{-2}^{1}2x^3dx + \int_{-2}^{1}3x\,dx + \int_{-2}^{1}-4dx = 2\int_{-2}^{1}x^3dx + 3\int_{-2}^{1}xdx - \int_{-2}^{1}4dx =$$

$$= 2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{1} + 3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} - 4x\Big|_{-2}^{1} = 2\left(\frac{1}{4}-4\right) + 3\left(\frac{1}{2}-2\right) - 4(1+2) =$$

$$= \frac{1}{2} - 8 + \frac{3}{2} - 6 - 4 - 8 = 2 - 8 - 6 - 4 - 8 = -24 .$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - непрерывно дифференцируемые[1)] функции на отрезке $[a, b]$.

Имеем

$$d[u(x)\,v(x)] = u(x)\,dv(x) + v(x)\,du(x).$$

Интегрируя это равенство в пределах от a до b и учитывая, что

$$du(x) = u'(x)dx \text{ и } dv(x) = v'(x)dx ,$$

находим

$$u(x)\,v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u(x)\,v'(x)dx + \int_a^b v(x)\,u'(x)dx .$$

[1)] То есть имеющие непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$

Отсюда получаем формулу интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)\,u'(x)dx\,.$$

Для краткости употребляется обозначение

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = u(x)v(x)\Big|_a^b\,.$$

Пример.

Найти $\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx$.

Полагая $u = x,\quad dv = \cos x\,dx = d(\sin x)$, получим $du = dx,\quad v = \sin x$. Применяя формулу интегрирования по частям в определенном интеграле, будем иметь

$$\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 2\pi\sin 2\pi - 0\cdot\sin 0 + \cos x\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \cos 2\pi - \cos 0 = 0.$$

Замена переменной в определенном интеграле

Пусть дан определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx\,,$$

где $f(x)$ - непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, и пусть по каким-то соображениям нам нужно ввести новую переменную t, связанную с прежней x соотношением

$$x = \varphi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a, b]$. Если при этом : 1) при изменении t от α до β переменная x меняется от a до b, т.е.

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \psi(\beta) = b,$$

2) сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Замечание. При вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной нет необходимости возвращаться к прежней переменной, достаточно лишь ввести новые пределы интегрирования по формулам $\varphi(\alpha) = a, \quad \psi(\beta) = b$.

Пример.

Вычислить $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$.

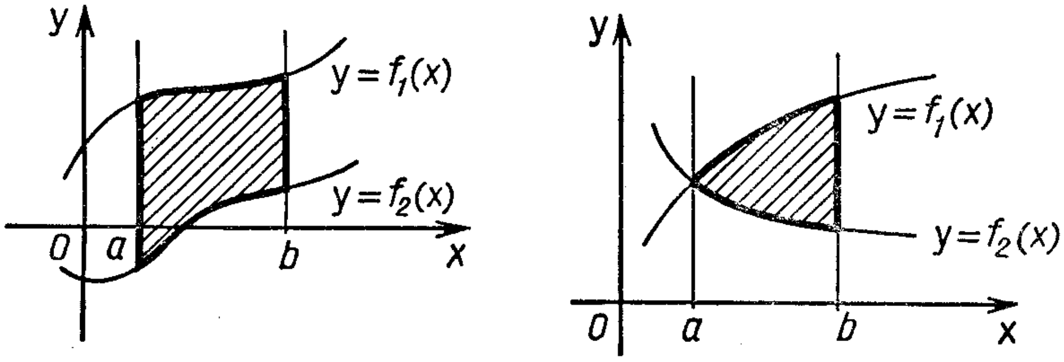
Полагаем $t = \sqrt{1+x}$, отсюда $x = t^2 - 1$ и $dx = 2t\,dt$. Новые пределы интегрирования определяются из формулы $t = \sqrt{1+x}$; полагая $x = 0$,будем иметь $t = 1$ и, полагая и $x = 3$, получим $t = 2$. Следовательно,

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx = \int_1^2 \left(t^2 - 1\right)\cdot t \cdot 2t\,dt = 2\int_1^2 \left(t^4 - t^2\right)dt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= 2\left(\frac{32-1}{5} - \frac{8-1}{3}\right) = \frac{62}{5} - \frac{14}{3} = 7\frac{11}{15}.$$

Использование интеграла для вычисления площади криволинейной трапеции.

Рассмотрим плоскую фигуру Φ, представляющую собой множество точек координатной плоскости xy, лежащее в полосе между прямыми $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, имеющее в своем составе точки с абсциссами $x=a$, $x=b$ и ограниченное сверху и снизу графиками непрерывных на $[a,b]$ функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, таких, что для всех x из $[a,b]$



справедливо неравенство $f_1(x) \geq f_2(x)$. Примеры таких фигур представлены на рисунке 1.

Рис. 1

В частности, фигура, изображенная на рисунке 2, ограничена сверху графиком функции $y=f(x)$, а снизу – прямой $y=0$. Такая фигура *называется криволинейной трапецией.*

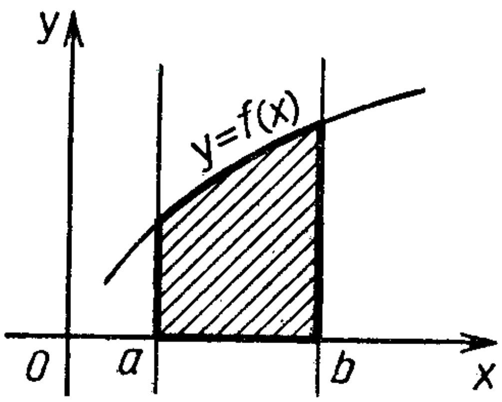
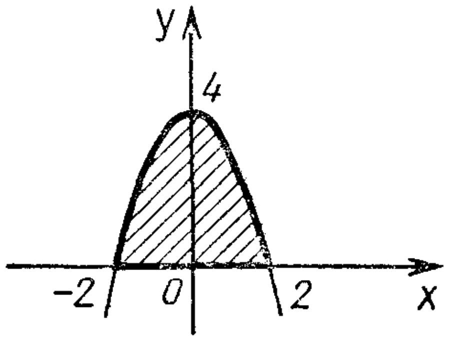


Рис. 2

Площадь S фигуры Φ вычисляется по формуле



$$S=\int_a^b\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx.$$

В частности, для криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 2, получаем:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx,$$

а для криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 3, получаем:

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx.$$

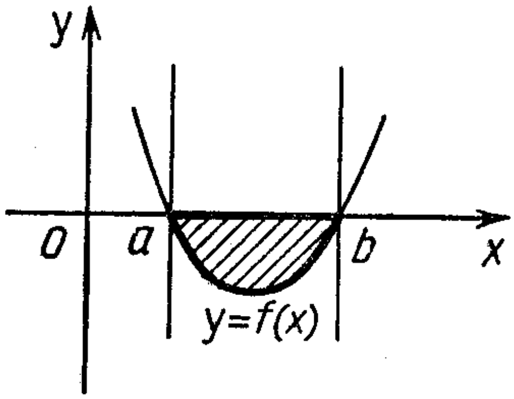


Рис. 3

<u>Примеры.</u>

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2$, $y=0$.

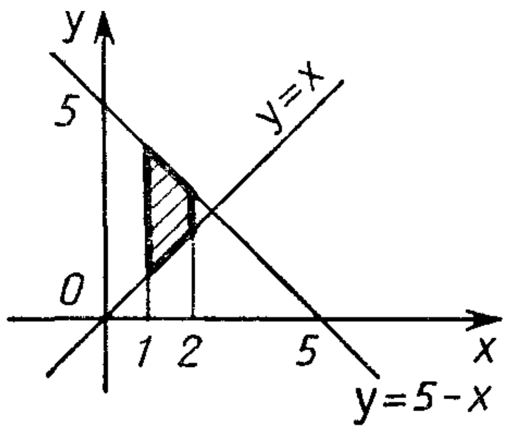
Фигура, площадь которой надо найти, изображена на рисунке 4.

Рис. 4

Воспользовавшись формулой $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, получим:

$$S = \int\limits_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \int\limits_{-2}^{2} 4\,dx - \int\limits_{-2}^{2} x^2 dx = 4x\Big|_{-2}^{2} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{2} = 4(2+2) - \frac{1}{3}(8+8) = \frac{32}{3}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 5 - x$, $x = 1$, $x = 2$.



Фигура, площадь которой надо найти, изображена на рисунке 5.

Рис. 5

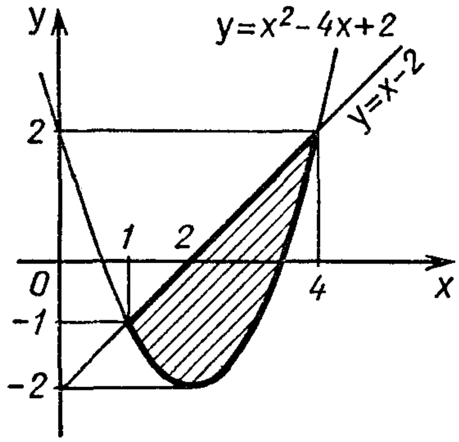
По формуле $S = \int\limits_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right) dx$ получим:

$$S = \int\limits_1^2 \left((5 - x) - x\right) dx = \int\limits_1^2 (5 - 2x) dx = \int\limits_1^2 5\,dx - 2\int\limits_1^2 x\,dx = 5x\Big|_1^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 =$$

$$= 5(2-1) - (4-1) = 2.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x - 2, y = x^2 - 4x + 2$.

Построив прямую $y = x - 2$ и параболу $y = x^2 - 4x + 2$, получим фигуру, площадь



которой требуется вычислить (Рис. 6).

Рис. 6

Значит, $S = \int\limits_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx$, где $f_1(x) = x - 2$, $f_2(x) = x^2 - 4x + 2$, а пределы интегрирования a и b есть абсциссы точек пересечения параболы и прямой. Для отыскания этих абсцисс решим уравнение $f_1(x) = f_2(x)$, т.е. $x - 2 = x^2 - 4x + 2$, откуда $x_1 = 1,\quad x_2 = 4$.

$$S = \int\limits_1^4 \left((x-2) - \left(x^2 - 4x + 2\right) \right) dx = \int\limits_1^4 \left(5x - x^2 - 4\right) dx =$$

$$= 5\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^4 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^4 - 4x\Big|_1^4 = \frac{5}{2}(16-1) - \frac{1}{3}(64-1) - 4(4-1) = 37{,}5 - 33 = 4{,}5.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = |x - 2|$.

Фигура, площадь которой требуется найти, изображена на рисунке 7.

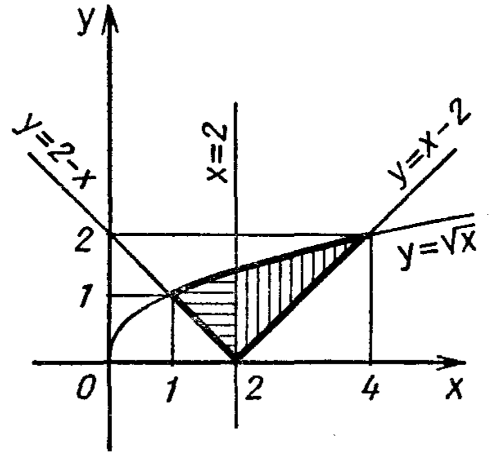


Рис. 7

Проведем прямую $x=2$. Тогда площадь S интересующей нас фигуры равна сумме S_1+S_2, где S_1 - площадь фигуры, заштрихованной на рисунке горизонтальной штриховкой, а S_2 - площадь фигуры, заштрихованной на рисунке вертикальной штриховкой. Имеем

$$S_1=\int_1^2\left(\sqrt{x}-(2-x)\right)dx=\int_1^2\left(x^{1/2}+x-2\right)dx=\left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_1^2+\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2-\left.2x\right|_1^2=$$

$$\frac{2}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)+\frac{1}{2}(4-1)-2(2-1)=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)+\frac{3}{2}-2=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{2}{1}=$$

$$=\frac{8\sqrt{2}-4+9-12}{6}=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}.$$

$$S_2=\int_2^4\left(\sqrt{x}-(x-2)\right)dx=\int_2^4\left(x^{1/2}-x+2\right)dx=\left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_2^4-\left.\frac{x^2}{2}\right|_2^4+\left.2x\right|_2^4=$$

$$=\frac{2}{3}\left(8-\sqrt{8}\right)-\frac{1}{2}(16-4)+2(4-2)=\frac{16-4\sqrt{2}}{3}-6+4=\frac{16-4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{1}=$$

$$=\frac{16-4\sqrt{2}-6}{3}=\frac{10-4\sqrt{2}}{3}.$$

Значит, $S=S_1+S_2=\dfrac{8\sqrt{2}-7}{6}+\dfrac{10-4\sqrt{2}}{3}=\dfrac{8\sqrt{2}-7+20-8\sqrt{2}}{6}=\dfrac{13}{6}$.

Элементы теории вероятностей

Комбинаторика.

Рассмотрим пример. Пусть имеются три книги. Обозначим их буквами А, Б, В. Эти книги можно расставить на полке по-разному.

Если первой поставить книгу А, то возможны такие расположения книг:

АБВ, АВБ.

Если первой поставить книгу Б, то возможны такие расположения книг:

БАВ, БВА.

Если первой поставить книгу В, то возможны такие расположения книг:

ВАБ, ВБА.

Каждое из этих расположений называют *перестановкой* из трех элементов.

Перестановкой из *n* элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке.

Число перестановок из n элементов обозначают символом P_n (читается «P из n»).

$$P_n=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1.$$

Расположив множители в порядке возрастания, получим:

$$\boldsymbol{P_n=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2)(n-1)n.}$$

Для произведения n первых натуральных чисел используют специальное обозначение: $n!$ (читается «n факториал»).

Например, $2!=1\cdot2=2$; $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$. По определению считают, что $1!=1$. Таким образом, число всевозможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле: $\boldsymbol{P_n=n!}$.

Рассмотрим задачи.

№ 1. Сколькими способами могут быть расставлены 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

Число способов равно числу перестановок из 8 элементов. По формуле числа перестановок находим, что

$$P_8=8!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8=40320.$$

Ответ: 40320 способов расстановки участниц забега.

№ 2. Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3?

Из цифр 0, 1, 2, 3 можно получить P_4 перестановок. Из этого числа надо исключить те перестановки, которые начинаются с 0, так как натуральное число не может начинаться с цифры 0. Число таких перестановок равно P_3. Значит, искомое число четырехзначных чисел (без повторения цифр), которое можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, равно P_4-P_3. Получаем:

$$P_4-P_3=4!-3!=24-6=18.$$

Ответ: 18 чисел.

№ 3. имеется 9 различных книг, 4 из которых – учебники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?

Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не 9, а 6 книг. Это можно сделать P_6 способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить P_4 перестановок учебников. Значит, искомое число способов расположения книг на полке равно произведению $P_6 \cdot P_4$. Получаем: $P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = 720 \cdot 24 = 17280$.

Ответ: 17280 способов.

Пусть имеется 4 шара и 3 пустых ячейки. Обозначим шары буквами *а, в, с, д.* В пустые ячейки можно по-разному разместить 3 шара из этого набора шаров. Если мы поместим шар *а* в первую ячейку, шар *в* во вторую ячейку, а шар *с* в третью ячейку, то получим одну из возможных упорядоченных троек шаров:

а	*в*	*с*

Выбирая по-разному первый, второй и третий шары, будем получать различные упорядоченные тройки шаров. Каждую упорядоченную тройку, которую можно составить из четырех элементов, называют *размещением* из четырех элементов по три.

Размещением из *n* элементов по *к* ($к \le n$) называется любое множество, состоящее из любых *к* элементов, взятых в определенном порядке их данных *n* элементов.

Число размещений из *n* элементов по *к* обозначают $A_n^к$ (читают: «А из *n* по *к*»).

Составим из элементов *а, в, с, д* все размещения по три элемента:

авс, авд, асв, асд, адв, адс,
вас, вад, вса, всд, вда, вдс,
сав, сад, сва, свд, сда, сдв,
дав, дас, два, двс,дса, дсв.

Из составленной таблицы видно, что $A_4^3 = 24$.

Число размещений из четырех элементов по три можно найти, не выписывая самих размещений. Будем рассуждать так. Первый элемент можно выбрать четырьмя способами, так как им может быть любой из четырех элементов. Для каждого выбранного первого элемента можно тремя способами выбрать из трех оставшихся второй элемент. Наконец, для каждых первых двух элементов можно двумя способами выбрать из двух оставшихся третий элемент. В результате получаем, что $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2$, то есть $A_4^3 = 24$.

С помощью тех же рассуждений нетрудно подсчитать, сколько можно составить размещений из *n* элементов по *к*, где $к \le n$. Первый элемент можно выбрать *n* способами. Так как после этого остается $n - 1$ элементов, то для каждого выбора первого элемента можно $n - 1$ способами выбрать второй элемент. Далее, для каждого выбора первых двух элементов можно $n - 2$ способами выбрать третий элемент (из $n - 2$ оставшихся) и так далее. Наконец, для каждого выбора первых $к - 1$ элементов можно $n - (к - 1)$ способами выбрать *к*-й элемент (из $n - (к - 1)$ оставшихся). Значит,

$$\mathbf{A_n^к = n(n - 1)(n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - (к - 1)).}$$

Мы получили формулу для вычисления числа размещений из *n* элементов по *к*. число размещений из *n* элементов по *к* равно произведению *к* последовательных натуральных чисел, из которых наибольшим является *n*.

Рассмотрим задачи.

№ 1. Учащиеся второго класса изучают 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предмета?

Любое расписание на один день, составленное из 4 различных предметов, отличается от другого либо предметами, либо порядком следования предметов. Значит, в этом примере речь идет о размещениях из 8 по 4. Имеем: $A_8^4=8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5=1680$.

Ответ: расписание можно составить 1680 способами.

№ 2. Сколько трехзначных чисел (без повторения чисел в записи числа) можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Если среди семи цифр нет нуля, то число трехзначных чисел (без повторения цифр), которые можно составить из этих цифр, равно число размещений из 7 элементов по 3. Однако среди данных цифр есть цифра 0, с которой не может начинаться трехзначное число. Поэтому из размещений из 7 элементов по 3 надо исключить те размещения, у которых первым элементом является цифра 0. Их число равно числу размещений из 6 элементов по 2. Значит, искомое число трехзначных чисел равно $A_7^3 - A_6^2$. Получаем: $A_7^3 - A_6^2=7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5=180$.

Ответ: 180 трехзначных чисел.

Пусть имеются пять гвоздик разного цвета. Обозначим их буквами *а, в, с, д, е.* Требуется составить букет из трех гвоздик. Выясним, какие букеты могут быть составлены.

Если в букет входит гвоздика *а*, то можно составить такие букеты:

авс, авд, аде, асд, асе, аде.

Если в букет не входит гвоздика *а*, но входит гвоздика *в*, то можно получить такие букеты:

всд, все, вде.

Наконец, если в букет не входят ни гвоздика *а*, ни гвоздика *в*, то возможен только один вариант составления букета:

сде.

Мы указали все возможные способы составления букетов, в которых по-разному сочетаются три гвоздики из данных пяти. Говорят, что мы составили все возможные *сочетания* из 5 элементов по 3.

Сочетанием из *n* элементов по *к* называется любое множество, составленное из *к* элементов, выбранных из данных *n* элементов.

В отличие от размещений в сочетаниях не имеет значения, в каком порядке указаны элементы. Два сочетания из *n* элементов по *к* отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из *n* элементов по *к* обозначают C_n^k (читают: «С из *n* по *к*»).

В рассмотренном примере, составив все сочетания из 5 элементов по 3, мы нашли, что $C_5^3=10$. Выведем формулу числа сочетаний из *n* элементов по *к*, где $k \leq n$. Для этого сначала выясним, как C_5^3 выражается через A_5^3 и P_3.

Мы нашли, что из 5 элементов *а, в, с, д, е* можно составить следующие сочетания по 3 элемента: *авс, авд, аде, асд, асе, аде, всд, все, вде, сде.*

В каждом сочетании выполним все перестановки. Число таких перестановок равно P_3. В результате получим все возможные комбинации из 5 элементов по 3, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов, то есть все размещения из 5 элементов по 3. Всего мы получим A_5^3 размещений.

Значит, $C_5^3 \cdot P_3 = A_5^3$. Отсюда $C_5^3 = \dfrac{A_5^3}{P_3}$.

Аналогично будем рассуждать в общем случае. Допустим, что имеется множество, содержащее n элементов, и из его элементов составлены все возможные сочетания по $к$ элементов. Число таких сочетаний равно $C_n^к$. В каждом сочетании можно выполнить $P_к$ перестановок. В результате мы получим все размещения, которые можно составить из n элементов по $к$. их число равно $A_n^к$.

Значит, $A_n^к = C_n^к \cdot P_к$. Отсюда $C_n^к = \dfrac{A_n^к}{P_к}$.

Мы получили формулу:

$$\mathbf{C_n^к = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(к-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot к}}.$$

Формулу числа сочетаний можно записать и в другом виде.

$$C_n^к = \frac{n!}{к!(n-к)!}.$$

Заметим, что эту формулу можно использовать и в случае, когда $n = к$, если принять по определению, что 0!=1.

Рассмотрим задачи.

№ 1. Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Каждый выбор отличается от другого хотя бы одним дежурным. Значит, здесь речь идет о сочетаниях из 15 элементов по 3. Имеем:

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!\cdot 12!} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3} = 455.$$

Ответ: дежурных можно выбрать 455 способами.

№ 2. Из вазы с фруктами, в которой лежит 9 яблок и 6 груш, надо выбрать 3 яблока и 2 груши. Сколькими способами это можно сделать?

Выбрать 3 яблока из 9 можно C_9^3 способами, а выбрать 2 груши из 6 можно C_6^2 способами, то сделать выбор фруктов можно $C_9^3 \cdot C_6^2$ способами. Имеем:

$$C_9^3 \cdot C_6^2 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 1260.$$

Ответ: выбор фруктов можно осуществить 1260 способами.

Элементы теории вероятностей

Испытание – действие, наблюдение с несколькими различными исходами «Подбрасывание монеты»

Событие – результат или исход испытания «выдает орел»

Случайное событие – которое может произойти или не произойти.

Достоверное событие – которое должно обязательно произойти.
Невозможное событие – которое точно не произойдет.
Совместные – появление одного, не исключает появление другого.
Несовместные – появление только одного из событий.
Противоположные – несовместные и являются единственными исходами.
! Вероятность события – отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события, к числу n всех исходов

A=m/n $\qquad 0 \le A \le 1$

Невозможное $\qquad$ Достоверное

Задание:

1. лотереи из 1000 билетов имеются 200 выигрышных, вынимают наугад 1 билет. Чему равна вероятность того что этот билет выигрышный?

N=1000, m=200. A=m/n, A=200/1000=0,2.

2.Из урны, в которой находится 5 белых и 3 черных шара, вынимают 1 шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

n=5+3, m=3, A=m/n=3/8=0,375.

3.Из урны, в которой находится 12 белых и 8 черных шаров, вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

$$n = C_{20}^{2} = \frac{20 \times 19}{1 \times 2} = 190$$

$$m = C2_{8} = \frac{8 \times 7}{1 \times 2} = 28$$

$$A = m/n = 28/190 = 0{,}147$$

4.В партии из 18 деталей находится 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей 2 окажутся бракованными.

$$n = C_{18}^{5} = 8568$$

Среди 5 взятых

$$c_{4}^{2} = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6 \text{ и } C_{14}^{3} = 364 \Rightarrow m = 6 \times 364 = 2184$$

$$A = m/n = 2184/8568 = 0{,}255$$

5.В урне находятся 7 белых и 5 черных шаров. Найти вероятность того, что:

1) наудачу вынутый шар окажется черным.

2) два наудачу вынутых шара окажутся черными.

1) $A = \frac{5,}{12}, A \approx 0,417$

2) $C_{12}^2 = \frac{12 \times 11}{1 \times 2} = 66$ $\quad A = \frac{10}{60}, A = \frac{5}{33} \approx 0.152$

$C_5^2 = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$

6.В коробке имеются 30 лотерейных билетов, из которых 26 пустых. Наугад вынимают одновременно 4 билета. Найти вероятность того, что из 4 билетов 2 окажутся выигрышными.

$$A = C_{30}^4 = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 5 \times 29 * 7 \times 27 = 27405$$

$$в = C_4^2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6\,; \text{н.в} = C_{26}^2 = \frac{26 \times 25}{1 \times 2} = 13 \times 25 = 325$$

$$m = в * нв = 6 \times 325 = 1950$$

$$A = \frac{1950}{27405} = 0,07$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение

Математическое ожидание – дискретной случайной величины |М| называется сумма произведений возможных значений случайной величины на вероятности этих значений.
Дисперсией Д случайной величины *x* называется математическое ожидание квадрата разности случайной величины *x* и математического ожидания
Средним квадратическим отклонением случайной величины называется корень квадратный из дисперсии

Возможные значения случайной величины	X_1	X_2	...	$X_к$	…
Вероятности этих значений	P_1	P_2	…	$P_г$	…

$M = X_1*P_1 + X_2 * P_2 + \ldots + X_n * P_n$

$D = M * [(X-m_x)^2]$

$r = \sqrt{D}$

Пример:

x	1	3	5
p	0,3	0,4	0,3

M = 1* 0,3 + 3 * 0,4 + 5 * 0,3 = 0,3 + 1,2 + 1,5 = 3

$D = (1 – 3)^2 * 0,3 + (3-3)^2 * 0,4 + (5-3)^2 * 0,3 = 4 * 0,3 + 0 * 0,4 + 4 * 0,3 = 1,2 + 1,2 = 2,4$

$r = \sqrt{D} = \sqrt{2,4} \approx 1,55$